Eight vertex model について

阪大教養　　高　橋　　　実

（１０月１７日受理）

図１のような八種類の vertex が二次元正方格子の上にあるとし，それぞれの vertex のエネルギーを $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_8$ とし，$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$，$\varepsilon_3 = \varepsilon_4$，$\varepsilon_5 = \varepsilon_6$，$\varepsilon_7 = \varepsilon_8$ がなりたっているとする。正方格子が N×M の大きさを持ち，それが torus の上にあるとすれば，$2^N \times 2^N$ の transfer matrix $\underline{T}$

$$\underline{T} \equiv T_r \prod_{i=1}^{N} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b)\sigma_i^z , & d\,\sigma_i^+ + c\,\sigma_i^- \\ c\,\sigma_i^+ + d\,\sigma_i^- , & \frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)\sigma_i^z \end{pmatrix} , \qquad (1)$$

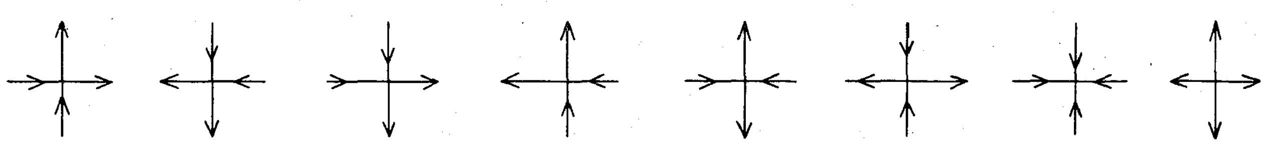
により，分配函数は

$$Z = \sum_{j=1}^{2^N} \lambda_j^M$$

のように書ける。ここで λ_j は $\underline{T}$ の固有値である。もしも $J_x = ab + cd$，$J_y = ab - cd$，$J_z = \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2)$ であれば，$\underline{T}$ は $\frac{1}{2}$ スピン一次元 XYZ 模型のハミルトニアン

$$\mathscr{H} = \sum_{i=1}^{N} J_x\,\sigma_i^x\,\sigma_{i+1}^x + J_y\,\sigma_i^y\,\sigma_{i+1}^y + J_z\,\sigma_i^z\,\sigma_{i+1}^z \qquad (2)$$

と交換し，固有ベクトルは共通にとることが出来る。このことは Sutherland[1] が最初に指摘した。



1　　2　　3　　4　　5　　6　　7　　8

第　1　図

Baxter[2)]は $N \to \infty$ の極限において

$$-\beta f = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln(\lambda_{max})$$

を解析的に求めることに成功した。β は $1/kT$，f は vertex 当りの自由エネルギー Λ_{max} は T の固有値の中で絶対値が最大のものである。ε_1，ε_3，ε_5，ε_7 を固定し温度を変化させれば J_x，J_y，J_z が変化してゆくが，$-\beta f$ が singular になるのは $J_x = \pm J_z$ のときである。これにより T_c が求められる。又 $\mu = \pi - \cos^{-1}(J_y/J_z)$ $0 < \mu < \pi$，として μ を定義すれば dominant singular part は T_c 近傍で

$$\cot(\pi^2/2\mu)\ |T-T_c|^{\pi/\mu} \qquad \text{for } \pi/2\mu \neq \text{ integer}$$

$$|T-T_c|^{\pi/\mu} \ln |T-T_c| \qquad \text{for } \pi/2\mu = \text{ integer}$$

に比例する。イジング模型に対応する場合は $\mu = \pi/2$ であり，したがって f の dominant singular part は

$$|T-T_c|^2 \ln |T-T_c|$$

に比例し，したがって比熱は T_c において対数発散をする。

またBaxter は一次元XYZ 模型の $N \to \infty$ の極限における site 当りの基底状態エネルギーを求めることにも成功した。J_z，$J_x + J_y$ を固定し $J_x - J_y$ を変化させれば，基底状態エネルギーは $J_x = J_y$，$|J_z/J_x| \leq 1$ のときに singular になる。

参 考 文 献

1) B.Sutherland，J.Math. Phys. 11 (1970)，3183

2) R.J.Baxter，Phys. Rev. Lett. 26 (1971)，832，834

R.J.Baxter Annals of Phys. 70 (1972)，193，323